INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE.

Mai 1975. — Option MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N. B. — 1° *Dans tout le problème, le corps de base est celui des nombres complexes.*

2° *La partie* III *est indépendante de la partie* II.

3° *Les questions* 5°, 6° *et* 7° *de la première partie sont sans incidence sur les parties* II *et* III.

PARTIE I

1° n étant un entier strictement positif, soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n nombres complexes. Considérons le déterminant :

$$D_n(a_1, a_2, \ldots a_n) =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1(a_1-1) & a_1(a_1-1)(a_1-2)\ldots a_1(a_1-1)(a_1-2)\ldots(a_1-n+2) \\ 1 & a_2 & a_2(a_2-1) & a_2(a_2-1)(a_2-2)\ldots a_2(a_2-1)(a_2-2)\ldots(a_2-n+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1 & a_n & a_n(a_n-1) & a_n(a_n-1)(a_n-2)\ldots a_n(a_n-1)(a_n-2)\ldots(a_n-n+2) \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire le déterminant dont l'élément intersection de la ligne de rang p et de la colonne de rang q est égal à

$$a_p(a_p - 1)\ (a_p - 2) \ldots (a_p - q + 2)\ .$$

Mettre $D_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sous forme d'un produit en ramenant le calcul de ce déterminant à celui d'un déterminant de Vandermonde.

2° Soit Δ_n le déterminant à n lignes et n colonnes dont l'élément a_{pq}, intersection de la ligne de rang p et de la colonne de rang q, est défini par la relation :

$$a_{pq} = \frac{1}{(n + p - q)\,!}$$

Calculer Δ_n. Vérifier que Δ_n s'exprime aisément à l'aide de

$$\prod_{p=1}^{p=n-1} p\,! \qquad \text{et de} \qquad \prod_{p=1}^{p=n} (n - 1 + p)\,!$$

Du résultat trouvé, déduire que $\Delta_n \neq 0$ quel que soit l'entier positif n.

3° Dans cette question et dans les suivantes, n désigne un entier positif ou nul.

On cherche s'il existe des polynômes non nuls, $p_n(x)$ et $q_n(x)$, de degrés au plus égaux à n, et une série entière en x, de somme $b_n(x)$, convergente dans tout le plan complexe, tels que l'on ait pour tout x complexe l'égalité :

$$(1) \qquad e^x q_n(x) - p_n(x) = x^{2n+1} b_n(x)\ .$$

On pose :

$$p_n(x) = s_0 + s_1 x + \ldots + s_n x^n\ ,$$
$$q_n(x) = t_0 + t_1 x + \ldots + t_n x^n\ .$$

Montrer que l'égalité (1) équivaut à un système d'équations liant les coefficients s_i et t_j, que l'on écrira.

Montrer que si on se donne arbitrairement t_0, le système précédent détermine de façon unique tous les autres coefficients. En déduire qu'il existe effectivement des polynômes non nuls vérifiant (1), et que, pour n donné, ces polynômes sont complètement déterminés à un facteur de proportionnalité près.

On ne tentera pas, dans cette question, d'expliciter les coefficients s_i et t_j, ce calcul faisant l'objet de la question suivante, par une méthode différente.

4° n désignant toujours un entier positif ou nul, vérifier que :

$$(2) \quad x^{-n-1} e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) x^{-n-1} = A_n(x)$$

$A_n(x)$ étant la somme d'une série entière en x, que l'on explicitera.

En dérivant n fois les deux membres de l'égalité (2), trouver effectivement deux polynômes $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ tels que :

$$(3) \qquad e^x Q_n(x) - P_n(x) = x^{2n+1} B_n(x)$$

$B_n(x)$ étant la somme d'une série entière en x. On pourra, pour dériver $x^{-n-1} e^x$, utiliser la formule de Leibniz donnant la dérivée d'ordre n d'un produit.

Donner explicitement les coefficients des polynômes P_n et Q_n, ainsi que ceux de B_n. Vérifier que le terme de plus haut degré de Q_n est égal à x^n.

5° Quelles relations existe-t-il entre les polynômes

$$P_n(-x) \ , \ Q_n(-x) \ , \ P_n(x) \ , \ Q_n(x) \ ?$$

Posons :

$$Q_n(x) = \alpha_n(x) - \beta_n(x) \ ,$$

où $\alpha_n(x)$ est un polynôme dont tous les monômes sont de même parité que x^n, $\beta_n(x)$ un polynôme dont tous les monômes sont de même parité que x^{n-1}.

Comment s'exprime $P_n(x)$ à l'aide de $\alpha_n(x)$ et de $\beta_n(x)$?

Vérifier — en utilisant les coefficients des polynômes $\alpha_n(x)$ et $\beta_n(x)$, qui sont connus — les égalités :

$$x^2 \beta_{n-2}(x) - \beta_n(x) + (4n - 2) \alpha_{n-1}(x) = 0$$
$$x^2 \alpha_{n-2}(x) - \alpha_n(x) + (4n - 2) \beta_{n-1}(x) = 0 \ .$$

En déduire les égalités :

$$(4) \qquad x^2 P_{n-2}(x) - P_n(x) = (4n - 4) P_{n-1}(x)$$
$$(5) \qquad x^2 Q_{n-2}(x) - Q_n(x) = (4n - 2) Q_{n-1}(x) \ .$$

6° Établir l'identité :

$$(6) \qquad P_{n-1}(x) Q_n(x) - P_n(x) Q_{n-1}(x) = (-1)^{n+1} 2 . x^{2n-1} \ .$$

On pourra pour cela prendre pour point de départ l'identité (3) et celle obtenue à partir de (3), en changeant n en $(n-1)$.

En déduire que les polynômes $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ sont premiers entre eux.

7° On désigne par P'_n et Q'_n les polynômes dérivés de P_n et de Q_n. Établir l'identité :

$$(7) \qquad P_n(x) Q_n(x) + P_n(x) Q'_n(x) - P'_n(x) Q_n(x) = (-1)^n x^{2n}$$

On pourra pour cela prendre pour point de départ l'identité (3) et celle qui s'en déduit par dérivation.

Démontrer que les polynômes P_n et Q_n n'ont que des racines simples, qu'ils n'ont pas de racine réelle si n est pair, et qu'ils ont une seule racine réelle — dont on précisera le signe — si n est impair.

PARTIE II

1° On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad xy'' - (x + 2\alpha) y' + \alpha y = 0$$

où α est un réel non nul.

Rechercher les séries entières dont la somme est une solution de l'équation (E). On distinguera les trois cas suivants :

2α n'est pas égal à un entier positif;

2α est égal à un entier positif impair;

α est égal à un entier positif n.

Étudier la convergence des séries obtenues.

Vérifier que, lorsque $\alpha = n$ entier positif, toute solution de (E) peut être mise sous la forme d'une série entière en x : quels sont les coefficients des termes de degrés $(n+1)$, $(n+2)$, ..., $2n$ d'une telle série ?

Montrer que, toujours si $\alpha = n$, $P_n(x)$ et $e^x Q_n(x) - P_n(x)$ et $Q_n(x)$ désignant les polynômes considérés en I. 4° — sont des solutions particulières de (E).

PARTIE III

Dans toute cette partie, m est un entier positif ou nul.

1° On désigne par $f(u)$ un polynôme en u à coefficients complexes, dont le degré est au plus égal à m. On suppose que x est un complexe non nul, et on pose, u désignant une variable réelle :

$$h_x(u) = -e^{-ux}\left[\frac{f(u)}{x} + \frac{f'(u)}{x^2} + \frac{f''(u)}{x^3} + \ldots + \frac{f^{(m)}(u)}{x^{m+1}}\right].$$

Calculer $h'_x(u)$.

Montrer ensuite que :

$$e^x \varphi(x) - \varphi_1(x) = x^{m+1} e^x \int_0^1 e^{-ux} f(u)\, du$$

où φ et φ_1 sont les polynômes tels que :

$$\varphi(x) = f(0)x^m + f'(0)x^{m-1} + f''(0)x^{m-2} + \ldots + f^{(m)}(0)$$
$$\varphi_1(x) = f(1)x^m + f'(1)x^{m-1} + f''(1)x^{m-2} + \ldots + f^{(m)}(1).$$

2° On donne deux entiers positifs ou nuls p et q tels que $p + q \leqslant m$. Montrer que, pour que les polynômes $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ aient pour degrés respectifs p et q, il faut et suffit que $f(u)$ soit de la forme définie par :

$$f(u) = \lambda u^{m-p}(u-1)^{m-q},$$

λ étant une constante non nulle, et que l'on ait :

$$p + q = m.$$

Ces conditions étant vérifiées, donner l'expression des polynômes $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$.

3° Dans le cas particulier où $p = q = n$, $m = 2n$, quelle relation existe-t-il entre les polynômes $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ et les polynômes $Q_n(x)$ et $P_n(x)$ considérés en I. 4° ?

4° On suppose $p + q = m$, mais on ne suppose plus nécessairement $p = q$. On choisit λ de façon que :

$$\varphi(0) = \varphi_1(0) = 1,$$

et on suppose x réel, *constant*.

Étudier la limite du rapport $\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ dans les trois hypothèses suivantes :

— l'entier p est fixe; l'entier q tend vers l'infini;

— l'entier q est fixe; l'entier p tend vers l'infini;

— les entiers p et q tendent tous deux vers l'infini, leur différence gardant une valeur constante.

En particulier, quel résultat obtient-on si $p = q = n$ et si $n \to +\infty$, x étant fixe ?

On pourra, pour traiter cette question, commencer par démontrer que, dans les trois cas considérés,

$$[e^x \varphi(x) - \varphi_1(x)] \text{ a pour limite } 0.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail